

Rozdział II

Przemieszczenia układów prętowych.

W rozdziale tym przedstawione zostaną sposoby wyznaczania przemieszczeń w zginanych układach prętowych. Zadania z tego zakresu poprzedzają w nauczaniu mechaniki metody rozwiązywania zadań statycznie niewyznaczalnych a wśród nich metodę sił i przemieszczeń.

W ogólnym ujęciu problemu podamy sposoby obliczeń przemieszczeń dla szerokiej klasy materiałów. Rozważania te będą więc słuszne zarówno w zadaniach sprężystych, lepkosprężystych, różnych modelach reologicznych, teorii naprężeń cieplnych itp.

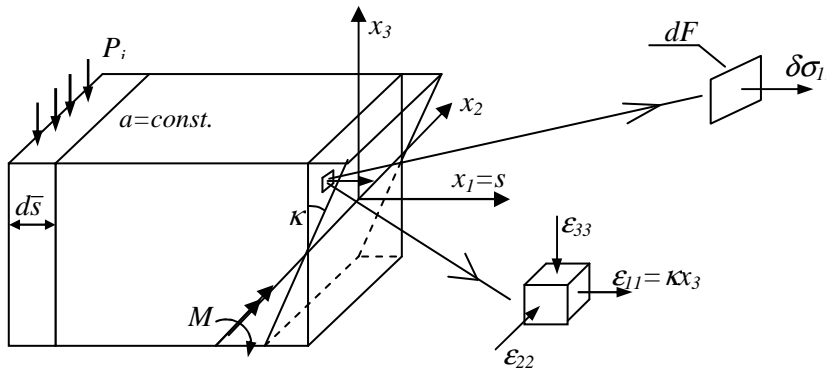
Wyjściowym punktem rozważań będzie równanie prac dopełniających jako relacja między siłami δP_i , naprężeniami $\delta \sigma_{ij}$ a przemieszczeniami u_i i odkształceniami ε_{ij} , a mianowicie:

$$\int_A \delta P_i u_i dA = \int_V \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$$

które w zginanym pręcie prowadzą do zależności ($ds = d\bar{s} a$) = dA

$$\int_s \delta P_i u_i ds = \int_s \int_F \delta \sigma_{11} x_3 \kappa dF ds = \int_s \kappa M_1 ds \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon_{11} = \kappa x_3$$

Jeżeli teraz $\delta P_i = 1_i \delta(s)$ gdzie $\delta(s)$ jest „delta” Diraca, to przemieszczenie u_i wyniesie $1_i u_i(s) = \int_s \kappa M_1 ds$



Rys. 2.0 Naprężenia i deformacje zginanego pręta

Uzyskany związek jest niezależny od konkretnej postaci równań fizycznych i będzie wykorzystywany do wyznaczania przemieszczeń w układach prętowych wykonanych z różnych materiałów.

W zagadnieniach statyki nosi on nazwę całki Mohra

$$\delta = 1_i u_i(s, t) = \int_s \kappa M_1(X_i = 1_i, s) ds$$

i jest wyprowadzony na podstawie geometrii odkształconego pręta. We wzorze tym M_1 jest momentem zginającym pochodzącym od uogólnionej siły jednostkowej $X_i=1_i$ (siły lub momentu) przyłożonej w miejscu i kierunku poszukiwanego przemieszczenia lub obrotu.

Można wykazać, iż w przypadku zginania i rozciągania pręta, kiedy $\varepsilon_{11} = \varepsilon_o + \kappa x_3$ gdzie ε_o jest wydłużeniem osi pręta będzie

$$1_i u_i = \int_s \kappa M_1(X_i = 1_i, s) ds + \int_s \kappa \varepsilon_o N_1(X_i = 1_i, s) ds$$

gdzie N_i – jest siłą osiową od $X_i=1_i$.

Podana w tej formie całka Mohra jest liniową relacją między przemieszczeniami układu a jego odkształceniami.

Z liniowości tej wynikają relacje

$$\int_s (a_1 \kappa_1 + a_2 \kappa_2) M_1 ds = a_1 \int_s \kappa_1 M_1 ds + a_2 \int_s \kappa_2 M_1 ds = a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2$$

gdzie

$$\delta_1 = \int_s \kappa_1 M_1 ds, \quad \delta_2 = \int_s \kappa_2 M_1 ds$$

a_1, a_2 – są operatorami liniowymi niezależnymi od współrzędnej przestrzennej s .

Z zależności tej będziemy często korzystali sumując (superponując) krzywizny i przemieszczenia pochodzące od różnych wpływów

$$\delta = \int_s (\kappa_e + \kappa_c + \kappa_T) M_1 ds = \int_s \kappa_e M_1 ds + \int_s \kappa_c M_1 ds + \int_s \kappa_T M_1 ds = \delta_e + \delta_c + \delta_T$$

gdzie symbole e, c, T , przy κ i δ oznaczają sprężyste, lepkie i termiczne składowe krzywizny i przemieszczeń.

Podobnie w zadaniach lepkosprężystych, gdzie w równaniach fizycznych występują iloczyny splątowe

$$f_1 * df_2 = f_2 * df_1 = \int_{-\infty}^t f_2(t-\tau) df_1(\tau)$$

$$\tau = \begin{cases} 0 & \text{dla } \tau \notin [0, t] \\ t & \text{dla } \tau \in [0, t] \end{cases}$$

zachodzą relacje

$$1_i u_i^1 = \int_s \kappa_1(s, t) M_1 ds \quad \text{oraz} \quad 1_i f_1 * du_i = \int_s f_1 * d\kappa M_1 ds$$

Podamy teraz zależności między siłami przekrojowymi (momentem zginającym, siłą osiową) a krzywizną κ lub wydłużeniem osi obojętnej ε_o w różnych materiałach

- **zadania liniowo-sprężyste**

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \quad \text{stąd} \quad \kappa = \frac{M}{EJ} \quad \text{i} \quad \varepsilon_o = \frac{N}{EF} \quad \text{oraz} \quad J = \int_F (z)^2 dF$$

gdzie σ , ε , E , F , J są kolejno naprężeniem, odkształceniem, modułem sprężystości oraz polem i momentem bezwładności przekroju poprzecznego.

- **zadania nieliniowo sprężyste** wg Bacha $\sigma = A\varepsilon^{1/n}$ prowadzą do zależności

$$\kappa = \left(\frac{M}{AJ(N+1)} \right)^n, \quad J(N+1) = \int_F x_3^{N+1} dF,$$

$$N = \frac{1}{n}, \quad \varepsilon_o = \left(\frac{N}{AF} \right)^n$$

- **przyrostowe zadania nieliniowe** $d\varepsilon = F(\sigma) d\sigma$, $d\sigma = E(\varepsilon) d\varepsilon$,

$$d\kappa = \frac{1}{EJ} dM, \quad J = \int_F (z)^2 dF, \quad d\varepsilon_o = \frac{1}{EF} dN$$

np. dla $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + A\sigma^n \rightarrow d\varepsilon = \left(\frac{1}{E} + nA\sigma^{n-1} \right) d\sigma$

stąd

$$EJd\kappa = (1 + nAE\sigma^{n-1}) dM, \quad FJd\varepsilon = (1 + nAE\sigma^{n-1}) dN$$

- **zagadnienia lepkiego płynięcia materiału** $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + B(T, t) \sigma^n$ prowadzą do relacji

$$\dot{\kappa} - \dot{\kappa}_o = B \left(\frac{M}{J(N+1)} \right)^n, \quad N = \frac{1}{n},$$

$$\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_o = B \left(\frac{N}{F} \right)^n, \quad J(N+1) = \int_F z^{N+1} dF$$

- **liniowa lepkosprężystość** $\sigma = E * d\varepsilon$ lub $\varepsilon = G * d\sigma$, $E * dG = H$ gdzie E, G i H są funkcjami relaksacji, pełzania i Heaviside'a prowadzi do zależności

$$\kappa = \frac{1}{J} G * dM, \quad M = JE * d\kappa \quad \text{oraz}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{F} G * dN, \quad N = FE * d\varepsilon$$

- **nieliniowa lepkosprężystość** $\sigma = (\varepsilon)^{1/n} * dA$ prowadzi do równania

$$M = J(N+1) \kappa^{1/N} * dA,$$

$$\kappa = \left(\frac{1}{J(N+1)} a * dM \right)^n, \quad A * da = H$$

Ponadto w przypadku liniowego po wysokości przekroju rozkładu temperatur $T(x_2) = T_o + \frac{T_g - T_o}{h} x_3$, $2T_o = T_g + T_d$ wystąpią wydłużenia termiczne ε_T oraz zmiany krzywizn κ_T określone równaniami

$$\varepsilon_T = \alpha_T \frac{T_g + T_d}{2}, \quad \kappa_T = \alpha_T \frac{T_d - T_g}{4}$$

gdzie $T_d, T_g, T_o, \alpha_T, h$ symbole oznaczają kolejno temperaturę dolnego i górnego włókna przekroju, temperaturę średnią, liniowy współczynnik rozszerzalności cieplnej oraz wysokość przekroju.

Wprowadzając do całki Mohra wyrażenia na krzywiznę $\kappa = \kappa_M + \kappa_T$ i wydłużenia $\varepsilon = \varepsilon_M + \varepsilon_T$ jako sumy odkształceń mechanicznych i cieplnych

zgodnie z fizycznymi własnościami materiału, np. nieliniowego sprężystego, otrzymamy wzory

$$\begin{aligned} 1_i u_i &= \int_s (\kappa_M + \kappa_T) M_1(X_i = 1) ds + \int_s (\varepsilon_M + \varepsilon_T) N_1(X_i = 1) ds = \\ &= \int_s \left(\frac{M}{AJ(N+1)} \right)^n M_1 ds + \int_s \alpha_T \frac{T_g - T_d}{h} M_1 ds + \int_s \left(\frac{N}{AF} \right)^n N_1 ds + \\ &+ \int_s \alpha_T \frac{T_g + T_d}{2} N_2 ds \end{aligned}$$

z których będziemy wyznaczać przemieszczenia. Powyższy wzór dotyczy zadania nieliniowo sprężystego $\sigma = A\varepsilon^n$ $N = \frac{1}{n}$, którego przypadkiem szczególnym ($A \rightarrow E$, $n=1$) są wzory na przemieszczenie w zadaniach sprężystych. Analogicznie otrzymamy wzory dla innych typów materiałów np. pełzania i wpływów niemechanicznych. Mogą one również ulec rozszerzeniu w wyniku uwzględnienia skręcania, sił poprzecznych oraz innych.

Występujące we wzorach na przemieszczenia całki dotyczą iloczynów funkcji momentów od obciążeń i sił jednostkowych. Podobnie jest z siłami osiowymi. Na ogół są to całki z iloczynów funkcji ciągłych i liniowych niezależnie od typu materiału.

W przypadku tym stosujemy uproszczony sposób obliczania całki polegający na tzw. przemnażaniu wykresów. Korzystamy tu z twierdzenia:

Jeżeli funkcja $M(s)$ jest funkcją ciągłą wraz z pierwszą i drugą pochodną, a $M_1(s)$ jest funkcją liniową to

$$\int_s M(s) M_1(s) ds = F\eta,$$

gdzie $F = \int_s M(s) ds$, a η jest rzędną na wykresie $M_1(s)$ pod środkiem ciężkości pola funkcji $M(s)$.

W obliczeniach stosuje się również inne metody wyznaczania całek Mohra.

Tok postępowania przy wyznaczaniu przemieszczeń.

1. Obliczenie reakcji w więzach oraz sporządzenie wykresów sił przekrojowych (momentów, sił osiowych itp.). Tą część zadania uważamy za

znaną, zaś wykresy momentów zginających odkładamy po stronie włókien rozciąganych, siły osiowe rozciągające oznaczamy jako dodatnie.

2. Sporządzenie funkcji momentów zginających i sił osiowych od siły jednostkowej $X_i = 1$ przyłożonej w miejscu i kierunku poszukiwanego przemieszczenia.

3. Wyznaczenia rozkładów krzywizn κ_T i wydłużeń ε_T pochodzących od przyczyn niemechanicznych (np. temperatury, skurczu, dyfuzji).

4. „Przemnożenie” wykresów sił wewnętrznych M i N oraz wykresów od sił jednostkowych. Podobnie należy postąpić z κ_T i ε_T .

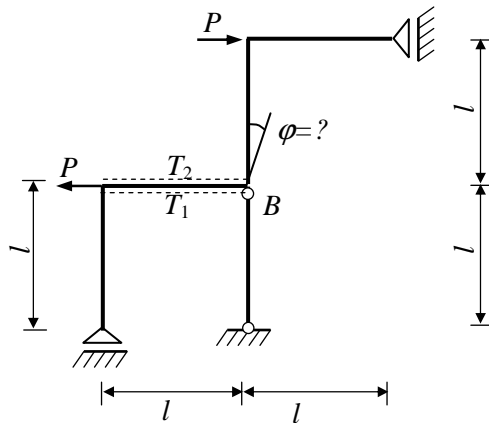
W prezentowanych przykładach nie będziemy rozwiązywali układu równań równowagi i wyznaczali reakcji, a jedynie nanosimy ich wartości uważając, iż zagadnienia te są znane czytelnikom z wstępnego kursu mechaniki.

ZADANIE 2.1.

W układzie prętowym o schemacie statycznym i obciążeniu jak na rys. 2.1a należy obliczyć kąt obrotu φ w przekroju przywęzłowym B .

Obliczenia należy przeprowadzić w zakresie:

- a) liniowo-sprężystym $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_T)$
- b) nieliniowo-sprężystym $\sigma = A(\varepsilon - \varepsilon_T)^N$
- c) teorii starzenia $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + A(\sigma)^n + \varepsilon_T$



Rys. 2.1a

Dane: $P, l, h, E, A, F, J, J(N + 1), T_1, T_2$

Rozwiązanie:

Korzystać będziemy z całki Mohra z uwzględnieniem wpływów termicznych

$$\varphi_A = \int_s \kappa_M M_1 ds + \int_s \varepsilon_M N_1 ds + \int_s \kappa_T M_1 ds + \int_s \varepsilon_T N_1 ds$$

W zależności tej κ_M , κ_T , ε_M , ε_T są odpowiednio krzywiznami wywołanymi wpływami mechanicznymi i cieplnymi oraz wydłużeniami mechanicznymi i cieplnymi. Różne postacie równań fizycznych wprowadzają tutaj jedynie zmiany w wyrażeniach na odkształcenia mechaniczne κ_M i ε_M , natomiast wyrażenia M_1 , N_1 pozostają niezmiennie w całym zadaniu.

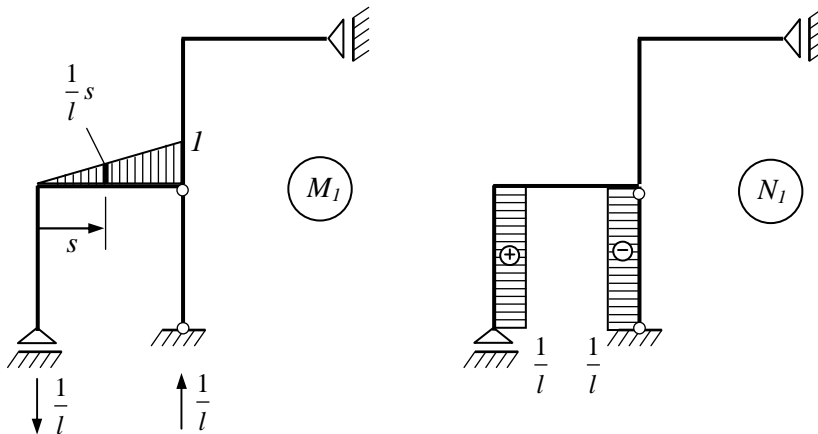
Funkcje M_1 , N_1 są rozkładami momentów i sił osiowych od działania jednostkowego momentu skupionego przyłożonego w przekroju przywęzłowym B. Natomiast wyrażenia na odkształcenia termiczne są następujące

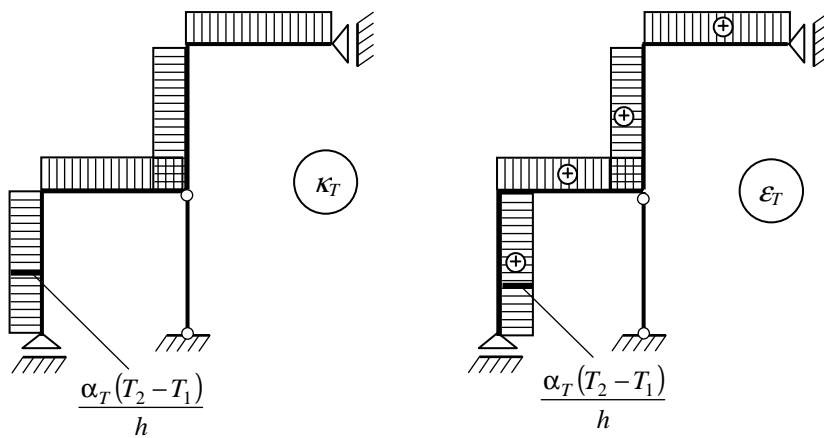
$$\kappa_T = \frac{\alpha_T(T_2 - T_1)}{h}, \quad \varepsilon_T = \frac{\alpha_T(T_1 + T_2)}{2}$$

Wykresy funkcji M_1 , N_1 , κ_T , ε_T mają w rozważanym przypadku postać (rys. 2.1b), zatem wartości cieplnych składników w całce Mohra dane są zależnościami

$$\int_s \kappa_T M_1 ds = 1 \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_T(T_2 - T_1)}{h}$$

$$\int_s \varepsilon_T N_1 ds = \frac{1}{l} \cdot l \cdot \frac{\alpha_T(T_1 + T_2)}{2}$$





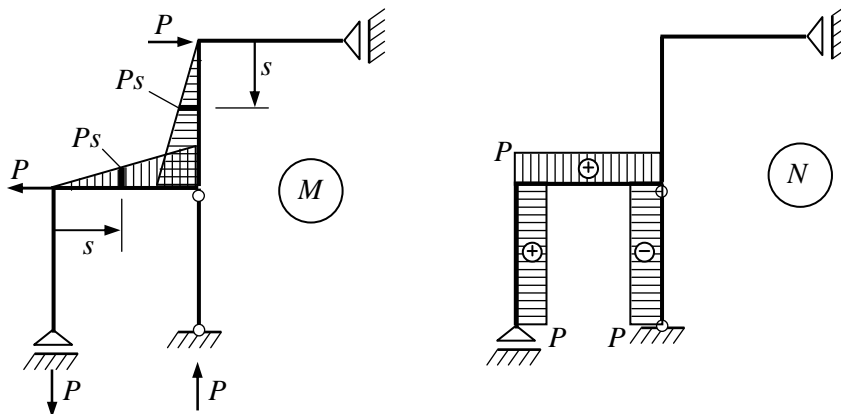
Rys. 2.1b

Możemy określić teraz wartość obrotu φ_A w przypadku różnych materiałów.

a) **Materiał liniowo sprężysty** określają następujące wyrażenia na wydłużenia i zmiany krzywizn

$$\varepsilon_M = \frac{N}{EF}, \quad \kappa_M = \frac{M}{EJ}$$

Wykresy funkcji M i N są następujące



Rys. 2.1c

Ostatecznie obrót φ_A wyrazi się zależnością

$$\begin{aligned}\varphi_A &= \int_s \frac{M_1 M}{EJ} ds + \int_s \frac{N_1 N}{EF} ds + \frac{\alpha_T (T_2 - T_1) l}{2h} + \frac{\alpha_T (T_1 + T_2)}{2} = \\ &= P \left(\frac{l^2}{3EJ} + \frac{1}{2EF} \right) + \frac{\alpha_T (T_2 - T_1)}{2h} \cdot l + \frac{\alpha_T (T_1 + T_2)}{2}\end{aligned}$$

b) Materiał nieliniowo-sprężysty

Wzory na zmiany krzywizn i wydłużeń mechanicznych mają postać

$$\kappa_M = \frac{M^n}{[AJ(N+1)]^n}, \quad \varepsilon_M = \frac{N^n}{AF^n}$$

Funkcje M i N wyrażają się następująco

$$M = Ps, \quad N = P$$

Obrót φ_A wyliczymy z wzoru

$$\begin{aligned}\varphi_A &= \int_o^l \frac{M^n M_1}{[AJ(N+1)]^n} ds + 2 \int_o^l \frac{N^n N_1}{(AF)^n} ds + \frac{\alpha_T (T_2 - T_1) l}{2h} + \frac{\alpha_T (T_1 + T_2)}{2} = \\ &= \int_o^l \frac{P^n s^n s}{[AJ(N+1)]^n l} ds + 2 \int_o^l \frac{P^n}{(AF)^n l} ds + \frac{\alpha_T (T_2 - T_1) l}{2h} + \frac{\alpha_T (T_1 + T_2)}{2} = \\ &= P^n \left[\frac{l^{n+1}}{(n+2)[AJ(N+1)]^n} + \frac{1}{(AF)^n} \right] + \frac{\alpha_T (T_2 - T_1) l}{2h} + \frac{\alpha_T (T_1 + T_2)}{2}\end{aligned}$$

c) Teoria starzenia

Wzór określający obrót φ_A w układzie pełzającym w/g teorii starzenia ma postać

$$\varphi_A = \int_s \frac{MM_1}{EJ} ds + \int_s \frac{AM^n M_1}{J(N+1)^n} ds + \int_s \kappa_T M_1 ds + \int_s \frac{NN_1}{EF} ds + \int_s \frac{AN^n N_1}{F^n} ds + \int_s \varepsilon_T N_1 ds$$

$$\begin{aligned}
\varphi_A &= \frac{Pl^2}{3EJ} + \int_0^l \frac{A(Ps)^n \frac{s}{l}}{J(N+1)^n} ds + \frac{\alpha_T(T_2 - T_1)l}{2h} + \frac{2P}{EF} + 2 \int_0^l \frac{AP^n \frac{1}{l}}{F^n} ds + \frac{\alpha_T(T_1 + T_2)}{2} = \\
&= \frac{Pl^2}{3EJ} + \frac{AP^n l^{n+1}}{(n+2)J(N+1)^n} + \frac{\alpha_T(T_2 - T_1)l}{2h} + \frac{2P}{EF} + \frac{2AP^n}{F^n} + \frac{\alpha_T(T_1 + T_2)}{2} = \\
&= P \left(\frac{l^2}{3EJ} + \frac{2}{EF} \right) + P^n \left(\frac{Al^{n+1}}{(n+2)J(N+1)^n} + \frac{2A}{F^n} \right) + \frac{\alpha_T(T_2 - T_1)l}{2h} + \frac{\alpha_T(T_1 + T_2)}{2}
\end{aligned}$$

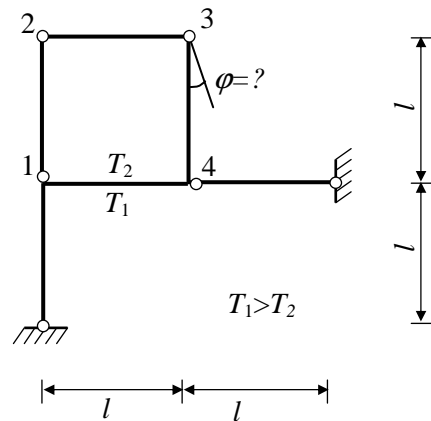
Z porównania ugięć tego samego punktu w zadaniu liniowym i nieliniowym wynika szansa na ocenę wpływu przyjętego w modelu materiału.

Wpływ ten określa wyrażenia bezwymiarowe postaci

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_N - \varphi_e}{\varphi_e} &= \left[P^n \left(\frac{l^{n+1}}{[(n+2)AJ(N+1)]^n} + \frac{1}{(AF)^n} \right) - P \left(\frac{l^2}{3EJ} + \frac{2}{EF} \right) \right] \cdot \\
&\quad \cdot \left[P \left(\frac{l^2}{3EJ} + \frac{2}{EF} \right) \right]^{-1}
\end{aligned}$$

ZADANIE 2.2.

W układzie prętowym o schemacie statycznym i obciążeniu jak na rys. 2.2a należy obliczyć kąt obrotu φ w punkcie 3.



Rys. 2.2a

Obliczenia należy przeprowadzić w zakresie:

- a) liniowo-sprężystym $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_T)$
 b) nieliniowo-sprężystym $\sigma = A(\varepsilon - \varepsilon_T)^N$
 c) teorii starzenia $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + A(\sigma)^n + \varepsilon_T$

Dane: $l, E, A, F, J, J(N+1), T_1, T_2$

Szukane: wartość kąta obrotu φ_3 punktu 3

Rozwiązanie:

Poszukiwany kąt obrotu φ_3 wyznaczamy uwzględniając jedynie człony niemechaniczne w całce Mohra

$$\varphi_3 = \int_s \kappa_M M_1 ds + \int_s \varepsilon_M N_1 ds + \int_s \kappa_T M_1 ds + \int_s \varepsilon_T N_1 ds$$

gdzie $\kappa_M, \kappa_T, \varepsilon_M, \varepsilon_T$ są odpowiednio krzywiznami oraz wydłużeniami wywołanymi wpływami mechanicznymi i cieplnymi. W naszym przypadku brak jest obciążenia zewnętrznego, więc κ_M i ε_M wynoszą zero.

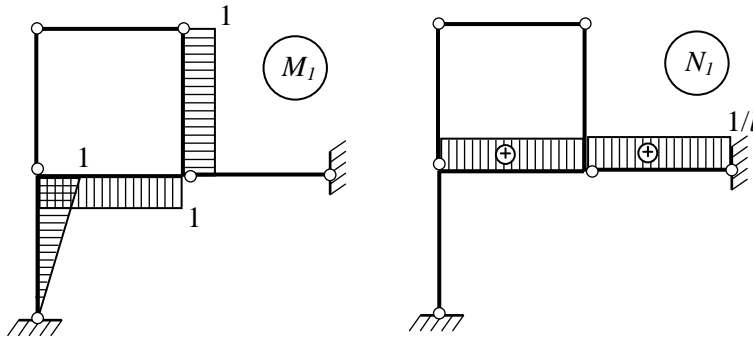
Wyrażenia $M_1, N_1, \kappa_T, \varepsilon_T$ pozostają niezmiennie w całym zadaniu, nie zależą od rodzaju materiału.

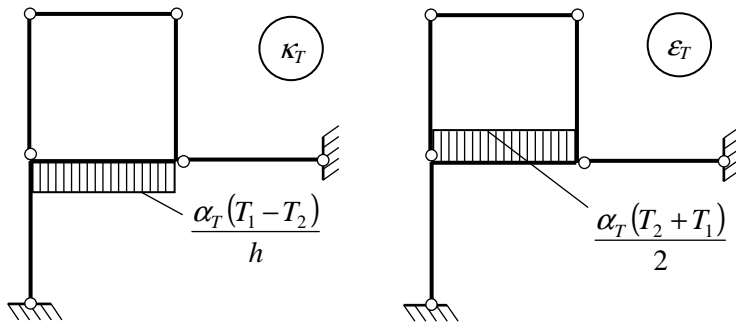
Funkcje M_1, N_1 są odpowiednio funkcjami momentów zginających i sił osiowych od działania momentu jednostkowego w punkcie 3.

Natomiast wyrażenia na odkształcenia termiczne są następujące

$$\kappa_T = \frac{\alpha_T(T_1 - T_2)}{h}, \quad \varepsilon_T = \frac{\alpha_T(T_1 + T_2)}{2}$$

Wykresy funkcji $M_1, N_1, \kappa_T, \varepsilon_T$ mają postać





Rys. 2.2b

Wartości „cieplnych składników” w całce Mohra dane są relacjami

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \int_s \kappa_T M_1 ds + \int_s \varepsilon_T N_1 ds = \\ &= 1 \cdot l \cdot \frac{\alpha_T (T_1 - T_2)}{h} + \frac{1}{l} \cdot l \cdot \frac{\alpha_T (T_1 + T_2)}{2} = \frac{\alpha_T l (T_1 - T_2)}{h} + \frac{\alpha_T (T_1 + T_2)}{2} \end{aligned}$$

Ponieważ w naszym zadaniu nie występuje obciążenie zewnętrzne więc nie ma funkcji momentów zginających M i sił osiowych N . Wynika stąd, że kąt obrotu φ_3 we wszystkich przypadkach a), b), c), ma taką samą wartość i wynosi

$$\varphi_3 = \frac{\alpha_T l (T_1 - T_2)}{h} + \frac{\alpha_T (T_1 + T_2)}{2}$$

Ogólnie, przemieszczenia w zadaniach statycznie wyznaczalnych zależą (przy braku obciążeń) jedynie od rozkładów temperatury lub innej przyczyny niemechanicznej, są natomiast niezależne od rodzaju materiału z jakiego jest wykonany układ.

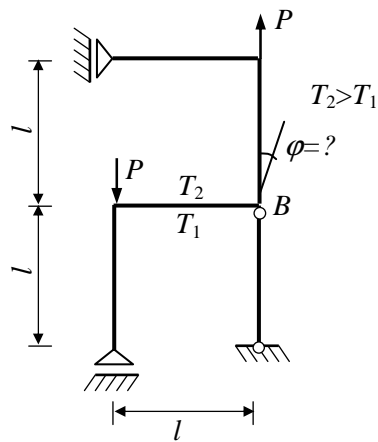
ZADANIE 2.3.

W układzie przedstawionym na rys. 2.3a należy obliczyć obrót φ_A w przekroju przywężłowy B . Obliczenia należy przeprowadzić w zakresie:

- a) - liniowo-sprężystym $\sigma = E \cdot \varepsilon$,
- b) - nieliniowo-sprężystym $\sigma = A \cdot \varepsilon^N$.

Dane: $P, l, E, A, F, J, J(N+1), T_1, T_2$

Szukane: wartość obrotu φ_A przekroju B .



Rys. 2.3a

Rozwiązanie:

W układzie nie wystąpią momenty zginające i siły tnące, a jedynie siły osiowe N . Kąt obrotu φ_A wyznaczmy z równania

$$\varphi_A = \int_s \varepsilon_M N_1 ds + \int_s \kappa_T M_1 ds + \int_s \varepsilon_T N_1 ds$$

gdzie $\kappa_T, \varepsilon_M, \varepsilon_T$ są odpowiednio krzywizną wywołaną wpływami cieplnymi oraz wydłużeniami mechanicznymi i cieplnymi, przy tym M_1, N_1, κ_T oraz ε_T pozostają w całym zadaniu niezmiennie. Funkcje M_1, N_1 są rozkładami momentów i sił osiowych od działania jednostkowego momentu skupionego w punkcie A.

Wyrażenia na odkształcenia termiczne mają postać

$$\kappa_T = \frac{\alpha_T(T_2 - T_1)}{h}, \quad \varepsilon_T = \frac{\alpha_T(T_1 + T_2)}{2}$$

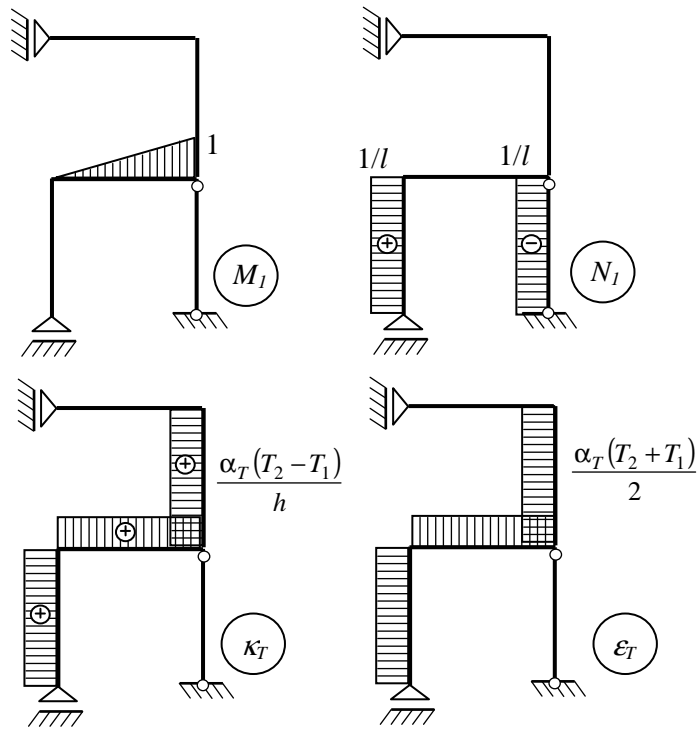
Wykresy funkcji M_1, N_1, κ_T i ε_T są następujące (rys. 2.3b).

Wartości κ_T odkładamy po stronie włókien rozciąganych.

Wyznamy teraz wartości cieplnych składników w całce Mohra.

$$\int_s \kappa_T M_1 ds = 1 \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_T(T_2 - T_1)}{h} = \frac{\alpha_T l (T_2 - T_1)}{2h}$$

$$\int_s \varepsilon_T N_1 ds = \frac{1}{l} \cdot l \cdot \frac{\alpha_T(T_1 + T_2)}{2} = \frac{\alpha_T(T_1 + T_2)}{2}$$



Rys. 2.3b

Następnie przechodzimy do określania wartości obrotu φ_A w przypadku różnych typów materiałów.

a) Materiał liniowo-sprężysty $\sigma = E \varepsilon$

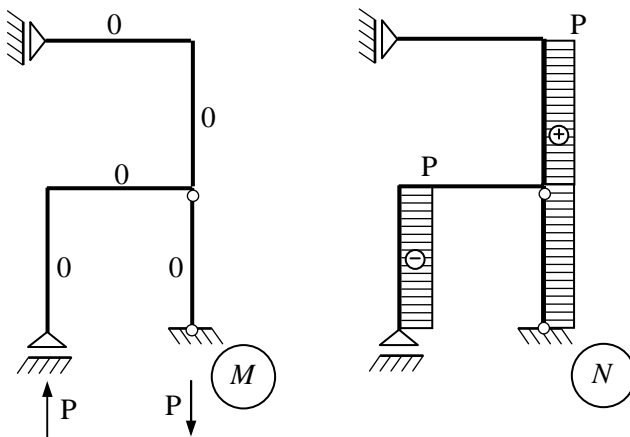
Wyrażenia na wydłużenia i zmiany krzywizn mają postać

$$\varepsilon_M = \frac{N}{EF}, \quad \kappa_M = \frac{M}{EJ}$$

Wykresy funkcji M i N są następujące (rys. 2.3c)

Obrót φ_A wyrazi się zatem zależnością

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \int_s \frac{NN_1}{EF} ds + \frac{\alpha_T l (T_2 - T_1)}{2h} + \frac{\alpha_T (T_1 + T_2)}{2} = \\ &= \frac{-2P}{EF} + \frac{\alpha_T}{2} \left[\frac{(T_2 - T_1)l}{h} + (T_1 + T_2) \right] \end{aligned}$$



Rys. 2.3c

b) Materiał nieliniowo-sprężysty $\sigma = A \varepsilon^N$.

Zmiany krzywizn i wydłużeń mechanicznych wyrażają się tutaj wzorami

$$\kappa_M = \frac{M^n}{[AJ(N+1)]^n}, \quad \varepsilon_M = \frac{N^n}{(AF)^n}$$

a zatem obrót φ_A punktu A określa się relacją

$$\begin{aligned} \varphi_A &= -2 \int_0^l \frac{P^n}{(AF)^n l} ds + \frac{\alpha_T}{2} \left[\frac{(T_2 - T_1)l}{h} + (T_1 + T_2) \right] = \\ &= -\frac{2P^n l}{(AF)^n} + \frac{\alpha_T}{2} \left[\frac{(T_2 - T_1)l}{h} + (T_1 + T_2) \right] \end{aligned}$$

Porównując oba wyniki możemy obliczyć ich względną różnicę Δ

$$\Delta = \frac{\varphi_e - \varphi_N}{\varphi_e} = \left(\frac{-2P}{EF} + \frac{2P^n}{(AF)^n} \right) \cdot \left(-\frac{EF}{2P} \right) = \left(1 - \frac{P^{n-1} EF}{(AF)^n} \right), \quad n = 1/N$$

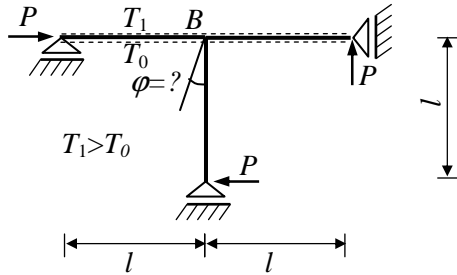
a tym samym oszacować wpływ przyjętego modelu obliczeń przemieszczeń na wyniki.

ZADANIE 2.4.

W układzie przedstawionym na rys. 2.4a należy obliczyć obrót φ_A w punkcie B .

Obliczenia należy przeprowadzić w zakresie:

- liniowo-sprężystym,
- nieliniowo-sprężystym,
- liniowym lepkosprężystym.



Rys. 2.4a

Dane: $P, l, E, A, F, J, J(N+1), T_1, T_0$

Szukane: wartości obrotu φ_A punktu A .

Rozwiązanie:

Dla rozwiązania tego zadania korzystać będziemy z całki Mohra z uwzględnieniem wpływów termicznych.

Wyrażenia na odkształcenia termiczne są następujące

$$\kappa_T = \frac{\alpha_T(T_1 - T_0)}{h}, \quad \varepsilon_T = \frac{\alpha_T(T_1 + T_0)}{2}$$

Wykresy funkcji $M_1, N_1, \kappa_T, \varepsilon_T$ mają postać

